

M.a.W. : f stimmt auf A abgesehen von einer kleinen Restmenge mit einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$ überein.

Beweis: Wir benutzen ein

Topologisches Lemma: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kom-
 pakt und $g: K \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig, so
existiert eine stetige Fortsetzung
 $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$.

Sei nun A und f wie im Korollar,
 zu $\varepsilon > 0$ wähle nach dem Satz
 $K \subset A$ kompakt mit $\lambda(A - K) < \varepsilon$,
 $f|_K$ stetig.

Lemma $\implies \varphi|_K$ hat eine stetige

Fortsetzung $\overline{\varphi}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^M$; offenbar ist

$$\{x \in A: \varphi(x) \neq \overline{\varphi}(x)\} \subset A - K$$

($\varphi = \overline{\varphi}$ auf K !), so dass

$$\lambda(\{x \in A: \varphi(x) \neq \overline{\varphi}(x)\}) < \varepsilon.$$



ad III. (Konvergenzverhalten)

Def 24.2 : Sei λ ein Maß auf

X . Eine Eigenschaft gilt λ -fast

überall auf $A \subset X$ (λ -f.ü.), wenn

sie bis auf eine λ -Nullmenge $A_0 \subset A$ richtig ist.

Beispiele:

① $f := \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\overset{1}{L^1}$ -f.ü.
gleich 0.

② Sei λ ein Maß auf X und Y ein topologischer Raum. Seien $f, g: X \rightarrow Y$.
Ist f λ -messbar und gilt $f = g$ λ -f.ü.,
so ist auch g λ -messbar.

(Hier ist also $\lambda(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.)

Beweis: selbst!

Der nächste Satz zeigt:

punktweise Konvergenz
 λ -f.ü. $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{gleichmäßige} \\ \text{Konvergenz bis} \\ \text{auf kleine Rest-} \\ \text{mengen} \end{array} \right.$

Satz 24.4

 : (von Egoroff)

Sei λ ein Maß auf der Menge X ,

$f_k : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ seien λ -messbare Funktionen. Sei $A \in \mathcal{M}_\lambda$ mit $\lambda(A)$

$< \infty$, und es gelte

$f_k \rightarrow g$ punktweise λ -f.ü. auf A .

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine λ -
messbare Teilmenge B von A mit

$\lambda(A-B) < \varepsilon$ und

$f_k \Rightarrow g$ (gleichmäßig!) auf B .

Beweis: Für $i, j \in \mathbb{N}$ sei

$$G_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - g(x)| \geq 2^{-i}\}.$$

Offenbar: $G_{i,j+1} \subset G_{i,j}$

$$\lambda(A) < \infty \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A \cap G_{i,j}) = \lambda(A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{i,j}) \quad \forall i$$

Wir zeigen gleich: $\left\{ \begin{array}{l} x \in A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{i,j} \\ (*) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f_m(x) \not\rightarrow g(x) \text{ bei } m \rightarrow \infty \end{array} \right.$

Nehmen wir $(*)$ an, so folgt nach Vor. und obiger Rechnung

$$(**) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda(A \cap G_{i,j}) = 0 \quad \forall i$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes i wählt man gemäß $(**)$ ein $N(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda(A \cap G_{i, N(i)}) < \varepsilon \cdot 2^{-i}$$

-279-

und setzt

$$B := A - \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{i, N(i)}$$

($\in \mathcal{M}_\lambda$!)

Dann gilt:

$$\lambda(A - B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(G_{i, N(i)}) < \varepsilon$$

und

$$\textcircled{+} \quad |\varphi_m(x) - g(x)| \leq 2^{-i}$$

für alle $x \in B$ und alle $m \geq N(i)$.

nämlich

Wäre $\checkmark$ für ein $x \in B$ und ein $m \geq N(i)$

$$|\varphi_m(x) - g(x)| > 2^{-i},$$

so wäre per Def. $x \in G_{i, N(i)}$

was aber

$$B \cap G_{i, N(i)} = \emptyset$$

Widerspricht. Also gilt $\oplus$, m.a.W.:

$$f_m \rightrightarrows g \text{ auf } B.$$

ad $\circledast$: Sei $x \in A \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{i,j}$.

$x \in G_{i,1}$ heißt: $\exists k_1 \geq 1$ mit

$$\left| f_{k_1}(x) - g(x) \right| > 2^{-i}$$

x gehört auch zu G_{i,k_1+1} , d.h.

$\exists k_2 \geq k_1+1$ mit $\left| f_{k_2}(x) - g(x) \right| > 2^{-i}$, usw.

Induktiv: $\exists k_1 < k_2 < \dots$,

$k_\ell \rightarrow \infty$, mit

$$|f_{k_\ell}(x) - g(x)| > 2^{-\ell} \quad \forall \ell$$

Dann kann $\{f_m(x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $g(x)$ konvergieren. $\square$

Def 24.3: Konvergenz dem Maße nach //

Sei μ ein Maß auf X , $f_k, f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien μ -messbar, $k \in \mathbb{N}$.

Sei $A \in \mathcal{M}_\mu$. Man sagt:

f_k konvergiert auf A dem Maße nach gegen f ,

Falls

$$\forall \varepsilon > 0: \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in A: |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$$

[vgl. W-Theorie: „stochastische Kugnz“]

Korollar (zu Egoroff):

Seien λ ein Maß auf X , $A \in \mathcal{M}_\lambda$
mit $\lambda(A) < \infty$, $f_k, f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$
 λ -messbar.

Gilt $f_k \rightarrow f$ punktweise λ -f.ü.
auf A , so folgt Konvergenz von f_k
gegen f auf A dem Maße nach.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze

$$E_k(\varepsilon) := \{x \in A : |\varphi_k(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Zu zeigen: $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k(\varepsilon)) = 0$, $\textcircled{*}$

Sei dazu $\delta < \varepsilon$. Nach Egoroff gibt

es $E \in \mathcal{M}_\lambda$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} E \subset A, \quad \lambda(E) < \delta, \\ \varphi_k \Rightarrow \varphi \quad \text{auf } \underline{\underline{A-E}} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \exists k(\delta)$ mit

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \delta$$

$$\forall k \geq k(\delta), x \in A - E.$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k(\varepsilon) \subset E \quad \forall k \geq k(\varepsilon)$$

Also ist $\lambda(E_k(\varepsilon)) < \delta \quad \forall k \geq k(\varepsilon)$,
d.h. (δ beliebig klein!) $\circledast$ gilt.



schließlich

Es gilt $\forall$ die teilweise Umkehrung des
Korollars (vgl. Bauer, Wahrscheinlich-
keitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie)

Satz 19.6

Satz 24.5 : (von Riesz)

Seien λ ein Maß auf X , $A \in \mathcal{A}$
mit $\lambda(A) < \infty$ und $f_k, f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$X \rightarrow \mathbb{R}^n$ λ -messbar.

Gilt dann Konvergenz von f_k
 gegen f auf A dem Maße nach,
 so findet man eine Teilfolge (!)
 $\{\tilde{f}_k\}$ mit $\tilde{f}_k \rightarrow f$ λ -f.ü.
auf A .

Bem: Die Folge selbst muss nicht p.w.
 λ -f.ü. gegen f auf A konvergieren!

Beweis: $\rightarrow$ Bauer

Zum Abschluss: ein

Approximationssatz für messbare
 Funktionen $X \rightarrow [-\infty, \infty]$

Def 24.4 : Sei X eine Menge.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt einfache Funktion,
wenn f nur endlich viele verschiedene
Werte annimmt; Mit

$$\text{Bild } f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\},$$

$$A_i := \{x \in X : f(x) = \alpha_i\}$$

gilt also:

$$f = \sum_{i=1}^M \alpha_i \chi_{A_i}$$

Satz 24.6 : Sei λ ein Maß auf der
Menge X , $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei λ -mess-
bar. Dann gibt es eine Folge (reellwertiger)
 λ -messbarer Funktionen

$$f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- f_k ist einfach
- $|f_k| \leq |f_{k+1}|$
- $\forall x \in X: \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$
- Ist f beschränkt, so gilt

$$f_k \Rightarrow f$$

- Ist $f \geq 0$, so kann man

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_k = f$$
 einrichten.

Beweis: Sei $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$
 und $1 \leq k \leq n$ sei